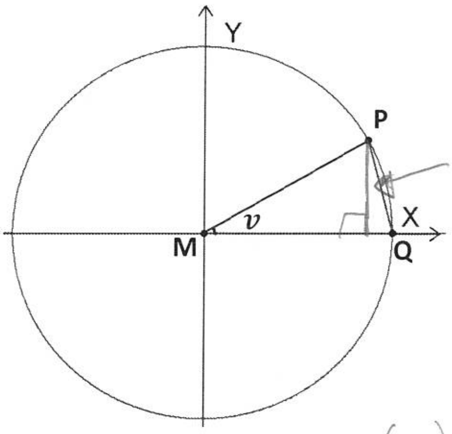
FACIT

Några blandade problemlösningsuppgifter om trig. formler.

Uppgifterna är tänkta att lösas utan miniräknare

1. Figuren visar en triangel inuti i en enhetscirkel. Triangeln har sina hörn i punkterna P, Q och M.
Punkt M är cirkelns medelpunkt och punkterna **P** och **Q** ligger på cirkeln, och Q har koordinaterna (1,0)
Visa att triangelns area kan bestämmas med hjälp av formeln $A = \frac{|\sin(v)|}{2}$

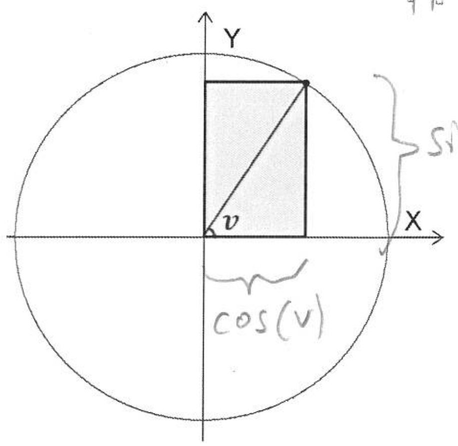


Arean av en triangel ges av

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \begin{bmatrix} b = 1 \\ h = \sin(v) \end{bmatrix} = \frac{1 \cdot \sin(v)}{2} = \frac{\sin(v)}{2}$$

Eftersom sin (v) kan vara negativ, men en area är positiv krävs beloppet.

2. Figuren visar en enhetscirkel med en inritad rektangel.
Rektangeln har ett hörn i cirkelns medelpunkt, och det motsatta hörnet på cirkelns rand.
Rektangelns area kommer att variera med vinkel v.



a) För ett visst värde på v har rektangeln arean $\frac{2}{5}$ ae.

Bestäm för det värdet på v ett möjligt värde på $\sin(2v)$. Svara exakt!

Arean av en rektangel ges av b·h. För denna gäller att $b = \cos(v)$ och $h = \sin(v)$

$$A = b \cdot h = \cos(v) \cdot \sin(v) = \frac{\sin(2v)}{2}$$

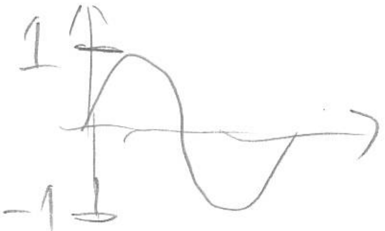
$\boxed{A = \frac{2}{5}}$

$\boxed{\sin(2v) = \frac{4}{5}}$

b) Undersök vilket som är det **största värde** som rektangelns area kan anta.

Enligt a) gäller att $A = \frac{\sin(2v)}{2}$

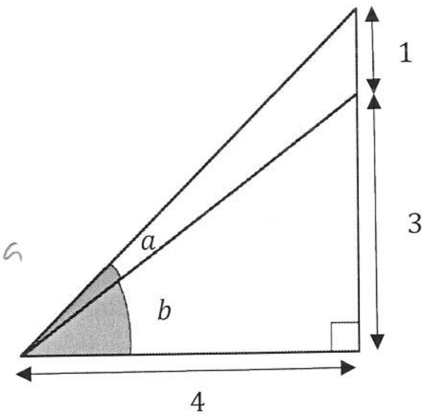
sin (2v) kan som mest anta värdet 1



$\Rightarrow$ Största arean $= \frac{1}{2}$

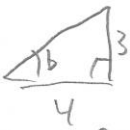
3. Figuren visar två trianglar med en gemensam sida. En av trianglarna är rätvinklig och några av måtten visas i figuren.

Bestäm med hjälp av figuren det exakta värdet av $cos(a)$



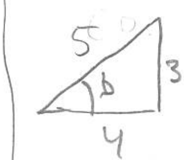
Figuren kan ses som två rätvinkliga trianglar:

och



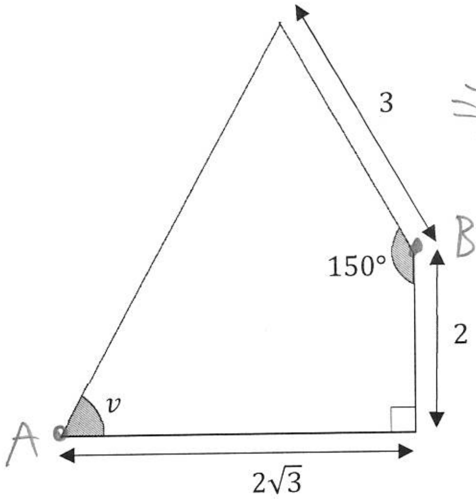
Vinkel a kan skrivas som $(45° - b)$

$\cos(a) = \cos(45° - b) = \left[\begin{array}{l}\text{Add.}\\ \text{formler}\end{array}\right] = \cos 45° \cdot \cos b + \sin b \cdot \sin 45° =$

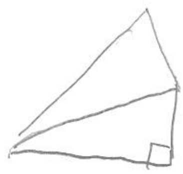


$= \left[\Rightarrow \begin{array}{l} \cos b = \frac{4}{5} \\ \sin b = \frac{3}{5} \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right) = \boxed{\frac{7}{5\sqrt{2}}}$

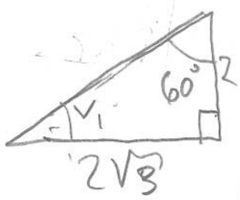
4. Figuren nedan visar en fyrhörning med några vinklar och mått angivna. Bestäm med hjälp av figuren värdet av $\cos(v)$.



Dra ett streck från A till B $\Rightarrow$



Då fås 2 trianglar:

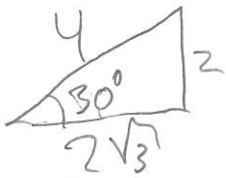


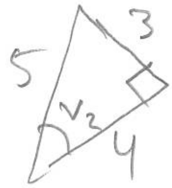
och

OBS! Rätvinklig!

där $v = v_1 + v_2$

$\tan v_1 = \frac{2}{2\sqrt{3}} \Rightarrow v_1 = 30°$ (enl. tabell)

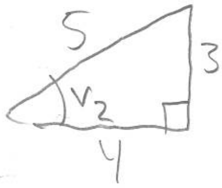




$\cos(v) = \cos(v_1 + v_2) = \cos(30° + v_2) = [\text{Add. formler}]$

$= \cos(30°) \cdot \cos(v_2) - \sin(v_2) \cdot \sin(30°) = \left[\begin{array}{l} \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(30°) = \frac{1}{2} \end{array}\right] =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(v_2) - \sin(v_2) \cdot \frac{1}{2} = \left[\begin{array}{l} \cos v_2 = \frac{4}{5} \\ \sin v_2 = \frac{3}{5} \end{array}\right] =$



$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{4\sqrt{3} - 3}{10}}$

5. Figuren visar en enhetscirkel med punkten **P** markerad.

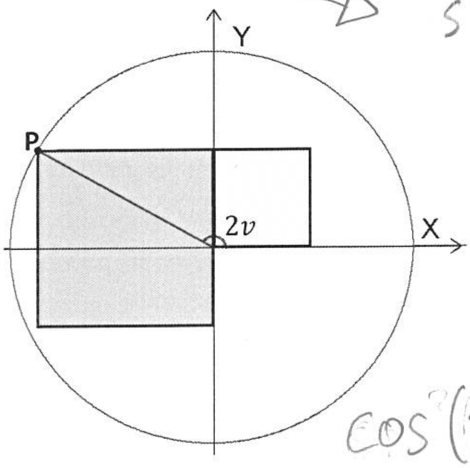
Från x-axeln till punkten P bildas vinkeln $2v$
I figuren har även två kvadrater markerats. För dessa gäller följande:

Kvadrat I har ett hörn i punkten **P** och sidans längd utgörs av det horisontella avståndet mellan **P** och y-axeln.

Kvadrat II har ett hörn i origo och sidans längd utgörs av det vertikala avståndet mellan **P** och x-axeln.

Utgå från att $\cos(v) = \frac{1}{4}$ och bestäm med hjälp av figuren...

$$\Rightarrow \sin(v) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{16}-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$



$$\sin(2v) = 2\cdot\sin(v)\cdot\cos(v) = 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\cos(2v) = 2\cos^2(v) - 1 = 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{8}$$

a) **summan** av de båda kvadraternas area.

En kvadrats area ges av s^2. $A = \square$ $B = \square$

sidan hos $A = \sin(2v)$

sidan hos $B = \cos(2v)$

Summan av areorna $= \sin^2(2v) + \cos^2(2v) =$ [Trig. ettan] $= 1$

b) **skillnaden** mellan den större den mindre kvadratens area.

Större: $\cos^2(2v)$ Skillnaden $\Rightarrow$

Mindre: $\sin^2(2v)$ $\cos^2(2v) - \sin^2(2v) =$

= [Se beräkningarna ovan] $= \frac{49}{64} - \frac{15}{64} = \boxed{\frac{34}{64}}$

c) värdet av $\cos(4v)$

$$\cos(4v) = \cos(2\cdot 2v) = \cos^2(2v) - \sin^2(2v)$$

= Svaret i b) $= \frac{34}{64}$